QCM - VRAI - FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit ABCD un carré direct et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Alors r est égale à

☐ $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$. ☐ $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$. ☐ $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

2. Soit (AB) une droite et C un point de (AB). Alors $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ est

☐ la symétrie centrale S_A. ☐ l'identité. ☐ la symétrie orthogonale $S_{(BC)}$.

3. Soit A, B et C trois points non alignés et f une isométrie qui fixe les deux points A et B et ne fixe pas le point C. Alors f est

☐ l'identité. ☐ la symétrie orthogonale $S_{(AB)}$. ☐ la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$.

4. Soit A et B deux points distincts et O le milieu de $[AB]$.

Soit f une isométrie qui envoie A sur B et B sur A. Alors $f(O)$ est

☐ A. ☐ O. ☐ B.

5 Soit ABC un triangle équilatéral et f une isométrie qui envoie A sur B, B sur C et C sur A. Alors $f \circ f \circ f$ est

☐ une symétrie orthogonale $S_{(AC)}$. ☐ la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$. ☐ l'identité.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La seule isométrie fixant trois points distincts est l'identité.

2. Les symétries glissantes sont les seules isométries sans point fixe.

3. Si une isométrie laisse globalement invariante une droite, alors elle est soit une symétrie orthogonale, soit une translation.

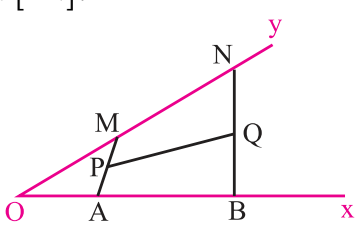
4. La composée de deux symétries orthogonales distinctes est soit une translation soit une rotation.

5Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A et direct.
Soit f une isométrie qui fixe A et envoie B sur C. Alors f est soit la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, soit la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de $[BC]$.

Exercices et problèmes

1 Soit A et A' deux points distincts du plan et Δ la médiatrice du segment $[AA']$.
Soit B un point du plan n'appartenant pas à Δ tel que (AB) et Δ ne sont pas parallèles.
Construire à la règle seulement le symétrique B' de B par rapport à la droite Δ.

2 Dans la figure ci-dessous $[Ox)$ et $[Oy)$ sont demi-droites sécantes. A et B sont deux points fixes de $[Ox)$.
Soit M et N deux points variables sur $[Oy)$ tels que $MN = AB$ et $N \in [My)$.
On note P le milieu du segment $[AM]$ et Q le milieu du segment $[BN]$.



Montrer que Q est l'image de P par une translation qui ne dépend pas des points M et N.

3 On considère un triangle ABC de centre de gravité G. On désigne par A', B' et C' les images respectives de A, B et C par une isométrie qui fixe G.
Montrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

4 Soit S_1 et S_2 deux symétries orthogonales d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2.
1. Discuter, suivant la position relative de Δ_1 et Δ_2, la nature de $S_1 \circ S_2$.
2. A quelle condition sur Δ_1 et Δ_2, a-t-on $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$?

5 On considère deux cercles isométriques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sécants en deux points A et B.
Soit deux points I et J tels que le quadrilatère IAJB est un losange et I est à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}$.
On suppose que les droites (IA) et (IB) recoupent le cercle $\mathscr{C}'$ respectivement en P et Q et que les droites (JA) et (JB) recoupent le cercle $\mathscr{C}$ respectivement en M et N.
Montrer que le quadrilatère MNQP est un rectangle.

6 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
1. Déterminer les images de A, I et L par la symétrie centrale S_1 de centre O.
2. Construire les points E et F, images respectives de J et K par la symétrie centrale S_2 de centre C.
3. Déterminer les images de A, I et L par $S_2 \circ S_1$, puis par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Conclure.

7 On considère un triangle ABC rectangle en A, on note A' le symétrique de A par rapport à la médiatrice du segment $[BC]$ et A'' le symétrique de A' par rapport à la droite (BC).
Montrer que le quadrilatère $ACA''B$ est un rectangle.

8 On considère un triangle ABC isocèle en A.
On désigne par D l'image de B par la symétrie orthogonale d'axe (AC) et par I le milieu du segment $[BC]$.
Soit f une isométrie laissant A invariant et transformant B et C respectivement en C et D.
On pose $g = S_{(AC)} \circ f$.
1. Déterminer $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ et $g(I)$.
2. Montrer que g est une symétrie orthogonale.

9 Soit ABC un triangle équilatéral direct.
On désigne par I le milieu de $[AC]$ et par Δ la droite passant par B et parallèle à (AC).
Soit J un point de [BA] distinct de B.
La droite passant par J et parallèle à (AC) coupe [BC] en un point K.
1. Caractériser $S_{(AC)} \circ S_\Delta$ et $S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$.
2. Identifier $f = S_{(AC)} \circ S_\Delta \circ S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$.
3. Déterminer la position du point J sur [BA] pour que f soit la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.

10 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe le nombre complexe z associe le point M′ d'affixe le nombre complexe $z' = iz - 1 - i$.
Montrer que g est une isométrie et la caractériser.

11 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f l'application de P dans P, qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M(x',y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. a. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
b. En déduire que f est symétrie orthogonale.

12 Dans le plan orienté P, on considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe le nombre complexe z associe le point M′ d'affixe le nombre complexe $z' = i\bar{z}$.
1. Montrer que f est une isométrie.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3. En déduire la nature de f.

13 Soit OAB un triangle équilatéral direct.

On désigne par Δ la droite perpendiculaire à (OA) en O, par D la médiatrice de [AB] et par S_1, S_2, S_3 et S_4 les symétries orthogonales d'axes respectifs (OA), (OB), Δ et D.
On note $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
1. Montrer que $f = S_3 \circ R$ où R est une rotation que l'on caractérisera.
2. Montrer que $R = S_3 \circ S_4$.
3. Identifier f.

14 Soit A et B deux points distincts du plan et f une isométrie qui laisse globalement invariant le segment [AB].
1. Montrer que f fixe le milieu de [AB].
2. En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant le segment [AB].

15 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O.

1. Donner la nature des isométries qui laissent $\mathscr{C}$ globalement invariant.
2. Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{C}$.
Déterminer les isométries qui laissent globalement invariants le cercle $\mathscr{C}$ et le triangle OAB.

16 Soit ABC un triangle équilatéral direct et f une isométrie qui envoie A sur B et B sur C.
1. Montrer que si f n'admet pas de points invariants, alors f est une symétrie glissante.
2. On suppose que f admet un point invariant.
a. Montrer que f n'est pas une symétrie orthogonale.
b. Identifier alors f.

17 Soit Δ et Δ' deux droites strictement parallèles, A est un point de Δ et B est un point de Δ'. Déterminer toutes les isométries qui transforment Δ en Δ' et A en B.

18 Soit ABCD un carré direct de centre I.

On se propose de déterminer les isométries du plan qui laissent globalement invariant le carré ABCD.
Soit f une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le carré ABCD.
1. a. Montrer que $f(I) = I$.
b. En déduire que f est soit l'identité du plan, soit une rotation de centre I et d'angle non nul et soit une symétrie orthogonale d'axe passant par I.
2. On suppose que f n'est pas une symétrie orthogonale.
Montrer que
Si $f(A) = A$, alors f est l'identité.
Si $f(A) = B$, alors f est la rotation de centre I d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Si $f(A) = C$, alors f est la symétrie centrale de centre I.
Si $f(A) = D$, alors f est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
3. On suppose que f est une symétrie orthogonale.
Montrer que
Si $f(A) = A$, alors f est la symétrie orthogonale d'axe (IA).

Si $f(A)=B$, alors f est la symétrie orthogonale d'axe Δ_2 où Δ_2 désigne la médiatrice du segment $[DC]$.

Si $f(A)=C$, alors f est la symétrie orthogonale d'axe (IB).

Si $f(A)=D$, alors f est la symétrie orthogonale d'axe Δ_1 où Δ_1 désigne la médiatrice du segment $[CB]$.

4. Conclure.

19 **O**n considère un triangle ABC équilatéral direct de centre G. On désigne par r la rotation de centre G et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par A', B' et C' les images respectives de A, B et C par r.

1. Quel est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$?
2. Soit f une isométrie transformant $\{A, B, C\}$ en $\{A', B', C'\}$.

a. Montrer que $f(G)=G$.

b. Déterminer toutes les isométries transformant $\{A, B, C\}$ en $\{A', B', C'\}$.

20 Soit ABC un triangle équilatéral direct.

1. Déterminer toutes les isométries f qui laissent globalement invariant le triangle ABC.
2. Soit $D=S_{(AC)}(B)$.

On se propose de déterminer toutes les isométries f qui transforment ABC en ACD.

a. On pose $g=S_{(AC)}\circ f$.

Déterminer l'image par g du triangle ABC.

b. En déduire toutes les isométries f.

21 Soit ABC un triangle rectangle en A et direct.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Déterminer la droite Δ tel que $S_{(CA)}\circ S_{(AB)} = S_{\Delta}\circ S_{(AH)}$.
2. Donner la nature de $S_{(BC)}\circ S_{(CA)}\circ S_{(AB)}$.

22 Soit ABC un triangle équilatéral direct et $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ABC.

La médiatrice de [BC] recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en D et la droite (BD) coupe (AC) en E.

1. a. Montrer que le triangle BCE est isocèle en C.

b. Montrer que (DC) est la médiatrice de [AE].

2. On note $f=S_{(BD)}\circ S_{(DC)}$ et $g=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$.

a. Caractériser les isométries f et g.

b. Déterminer les droites Δ et Δ' telles que $f=S_{\Delta}\circ S_{(AD)}$ et $g=S_{(AD)}\circ S_{\Delta'}$.

c. Montrer que Δ et Δ' sont parallèles puis identifier $f\circ g$.

QCM

1) $V_{(A,\frac{\pi}{2})} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

2) $S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = id\rho$

3) $f = S_{(AB)}$

4) $f(0) = 0$

5) $f \circ f \circ f = id\rho$

Vrai Faux

1) (Faux)

En effet : une symétrie orthogonale d'axes Δ fixe tout point de Δ

2) (Faux)

Une translation de vecteur non nul est une isométrie sans point fixe

3) (Faux)

Une symétrie glissante laisse globalement invariant son axe.

4) (Vrai)

$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une translation si $\Delta // \Delta'$,

$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une rotation de centre I si $\Delta \cap \Delta' = \{I\}$

5) (Vrai)

En effet : f fixe le point A d'où f est soit l'identité, soit une symétrie orthogonale d'axe passant par A, soit une rotation de centre A.

Comme $f(B) \neq B \rightarrow f \neq id$

D'ou f est une rotation de centre A ou symétrie orthogonale.

$f(B) = C \Rightarrow f = r_{(A,\frac{\pi}{2})}$ Ou $f = S_{\Delta}$ avec $\Delta = \mathrm{med}[BC]$

EX 1 :

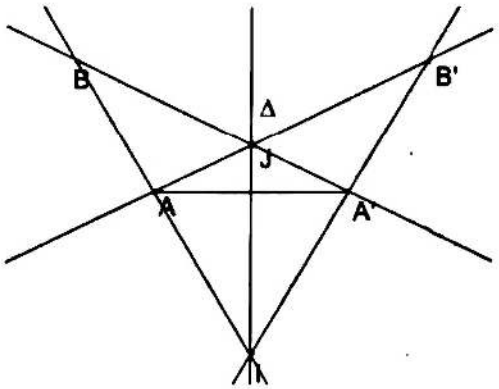
1.On marque le point I intersection de (AB) et Δ

2.On trace la droite (IA') qui représente l'image de (AB) par S_Δ

3.On marque le point j intersection de (A'B) et Δ

4.On trace la droite (JA) qui représente l'image de (A'B) par S_Δ

5. (AB) et (A'B) se coupent en B alors leurs images (IA') et (AJ) se coupent B'= S_Δ(B)



EX 2 :

Soit I le point de [Oy] tel que : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{MN}$

$$P = A * M \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$Q = B * N \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ON}}{2}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$$

$$= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN}}{2}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OI}\right)$$

EX 3 :

$f(G) = G$

On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

D'où : $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC'}$$

$$= \underbrace{\left(\overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{GC'}\right)}_{\vec{0}} - \underbrace{\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)}_{\vec{0}}$$

$= \vec{0}$

EX 4 :

1) $f = s_1 \circ s_2 \qquad f^{-1} = s_2 \circ s_1$

* $\Delta_1 = \Delta_2 \rightarrow f = id \rightarrow f^{-1} = id$

* $\Delta_1 // \Delta_2 et \Delta_1 \neq \Delta_2$

$\rightarrow f$ est une translation

$\rightarrow f^{-1}$ est une translation

* $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{I\}$

$\rightarrow f$ est une rotation de centre I

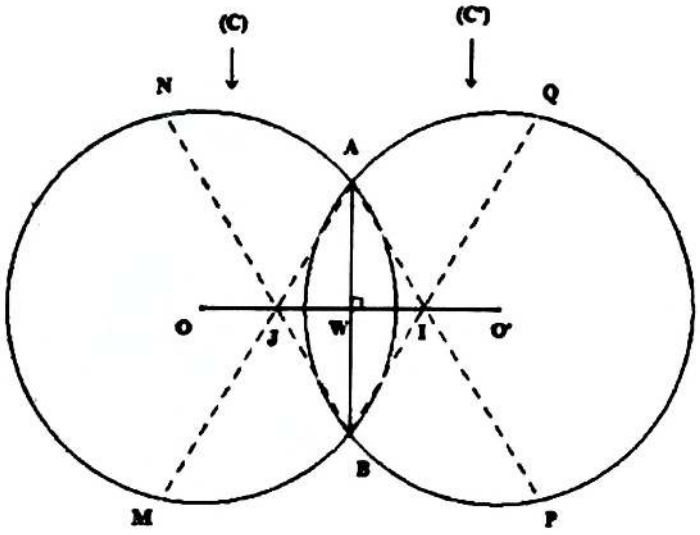
$\rightarrow f^{-1}$ est une rotation de centre I

2)

$*\Delta_1 = \Delta_2 \rightarrow f = f^{-1}$

$*\Delta_1 \perp \Delta_2 \rightarrow f = f^{-1}$

EX 5 :



Désignons par « O » et « O' » les centres respectifs de (C) et (C')
W : le centre du losange IAJB alors W= A*B = I*J = O*O'

⇒ L'image de la droite (AJ) par la symétrie S_w est la droite (BI)

et ⇒ L'image du cercle (C) par la symétrie S_w est le cercle (C')

D'où $S_W(M) = Q$

De même $S_W(N) = P$. Par suite W= P*N = Q*N

⇒PQNM est un parallélogramme.(1)

*

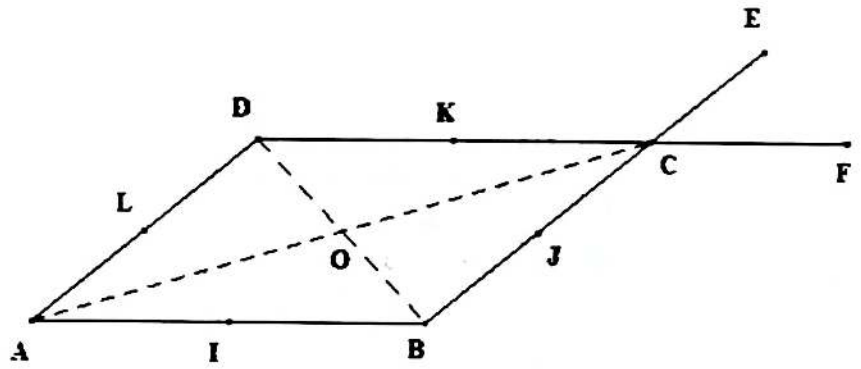
$$\left.\begin{array}{l} S_{(OO')}(A) = B \\ S_{(OO')}(I) = I \end{array}\right\rangle \Rightarrow S_{(OO')}(AI) = (BI) \quad \text{Or} \quad S_{(OO')}(C) = (C')$$

D'où $S_{(OO')}(P) = Q$. De même on montre que : $S_{(OO')}(N) = M$

Ce qui permet de conclure que PN = QM (2)

(1)+(2) => PQNM est un rectangle.

EX 6 :



1)

$S_1(A) = C$

$S_1(I) = K$

$S_1(L) = J$

2) voir figure

3)

$S_2 o S_1 (A) = S_2(C) = C$

$S_2 o S_1 (I) = S_2(K) = F$

$S_2 o S_1 (L) = S_2(J) = E$

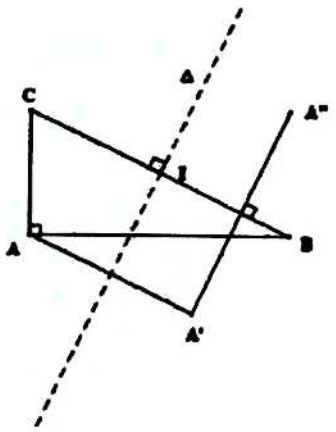
$t_{\overrightarrow{AC}}(A) = C$

$t_{\overrightarrow{AC}}(I) = F$

$t_{\overrightarrow{AC}}(L) = E$

$S_2 o S_1$ et $t_{\overrightarrow{AC}}$ sont Deux isométries qui coïncident sur trois points non alignés C,E et F Donc sont égales D'où $S_2 \circ S_1 = t_{\overrightarrow{AC}}$

EX 7 :



Désignons par I= B*C et Δ : la médiatrice de [BC].

$\Delta \perp (BC)$ d'où $S_{(BC)} \circ S_{\Delta} = S_I$: La symétrie centrale de centre I.

$$S_{(BC)} \circ S_{\Delta}(A) = S_{(BC)}(A') = A''$$

$$\Rightarrow S_I(A) = A'' \Rightarrow I = A^* A''$$

$$S_{(BC)} \circ S_{\Delta}(B) = S_{(BC)}(C) = C \Rightarrow I = B^* C$$

D'où ACA''B est un parallélogramme et comme $(AB) \perp (AC)$ Alors ACA''B est un rectangle.

EX 8 :

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = C \\ f(C) = D \end{cases}$$

1)

$$g(A) = S_{(AC)} \circ f(A) = S_{(AC)} A = A$$

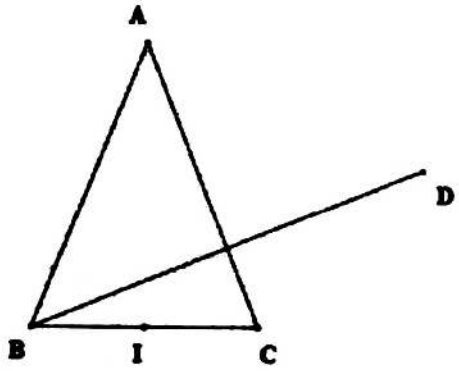
$$g(B) = S_{(AC)} \circ f(B) = S_{(AC)} C = C$$

$$g(C) = S_{(AC)} \circ f(C) = S_{(AC)} D = B$$

$$I = B^* C \Rightarrow g(I) = g(B)^* g(C)$$

$$\Rightarrow g(I) = C^* B$$

$$\Rightarrow g(I) = I$$



2) $g \neq id$ car $g(B) \neq B$ alors g est une isométrie, différente de l'identité et fixe deux points A et I d'où $g = S_{(AI)}$

EX 9 :

1) $S_{(AC)} \circ S_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{BI}}$ car $\Delta // (AC)$

$S_{(KJ)} \circ S_{(AC)} = t_{2\overrightarrow{IH}}$ avec $\{H\} = (JK) \cap (BI)$

2)

$$f = (S_{(AC)} \circ S_{\Delta}) \circ (S_{(KJ)} \circ S_{(AC)})$$

$$f = t_{2\overrightarrow{BI}} \circ t_{2\overrightarrow{IH}}$$

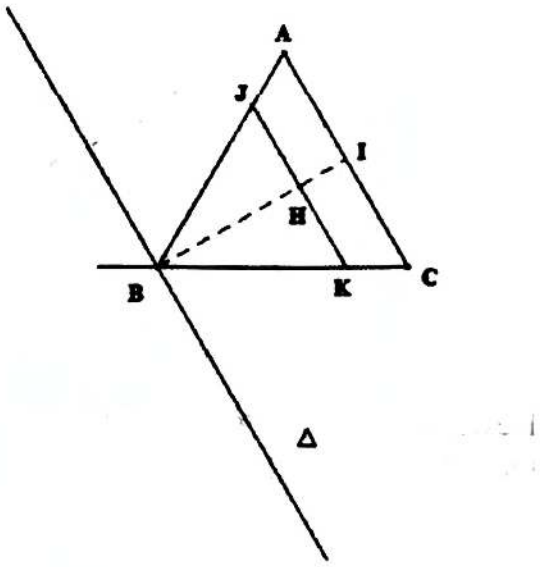
$$f = t_{2\overrightarrow{BH}}$$

3)

On a $f = t_{2\overrightarrow{BH}}$ donc pour que f soit la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$ il faut que $2\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BI}$

$$\Leftrightarrow H = B * I$$

$$\Leftrightarrow J = A * B$$



EX 10 :

Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ d'images respectifs $M'_1(z'_1)$ et $M'_2(z'_2)$ par f.

On a :

$$z'_1 = iz_1 - 1 - i$$

$$z'_2 = iz_2 - 1 - i$$

$$|z'_2 - z'_1| = |i(z_2 - z_1)|$$

$$= |i| . |z_2 - z_1|$$

$$= |z_2 - z_1|$$

D'où $M'_1 M'_2 = M_1 M_2$

f conserve la distance $\Rightarrow f$ est une isométrie

*Déterminons l'ensemble des points invariant par f.

$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z$

$\Leftrightarrow iz - 1 - i = z \Leftrightarrow z(i-1) = 1 + i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{i+1}{i-1} \Leftrightarrow z = -i$

D'où f laisse le point I d'affixe (-i) comme unique point invariant.

Par suite f est une rotation de centre I

Soit $M \neq i$ $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz - 1 - i$

$$\Leftrightarrow z' + i = i(z + i) \Leftrightarrow \frac{z' + i}{z + i} = i$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' + i}{z + i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' + i| = |z + i| \\ Arg\left(\dfrac{z' + i}{z + i}\right) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

D'où $f = r_{(I,\frac{\pi}{2})}$

EX 11 :

1) Montrons que f conserve les distances $\begin{matrix} M_1(x_1,y_1) & M_2(x_2,y_2) \\ M'_1 = f(M_1) & M'_2 = f(M_2) \end{matrix}$

$$M'_1(x'_1,y'_1)tq:\begin{cases} x'_1 = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ y'_1 = 1+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{cases} \text{ et } M'_2(x'_2,y'_2)tq:\begin{cases} x'_2 = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ y'_2 = 1+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{cases}$$

$$(M'_1M'_2)^2 = (x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+y_2-x_1-y_1)\right]^2+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2-y_2-x_1+y_1)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1).(y_2-y_1)\right]+\frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-2(x_2-x_1).(y_2-y_1)\right]$$

$$= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$= (M_1M_2)^2$$

d'ou $M'_1M'_2 = M_1M_2$

Par suite f est une isométrie

2) a) soit $M(x,y)$

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = \sqrt{2}-2+x+y \\ \sqrt{2}y = \sqrt{2}+x-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x-y = \sqrt{2}-2 \\ x-(1+\sqrt{2})y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-(1+\sqrt{2})y+\sqrt{2} = 0 \\ x-(1+\sqrt{2})y+\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x-(1+\sqrt{2})y+\sqrt{2} = 0$$

D'où l'ensemble des points invariant par f est la droite $\Delta : x-(1+\sqrt{2})y+\sqrt{2} = 0$

b) $f = S_\Delta$

EX 12 :

1) soient $M_1(z_1)$ $M_2(z_2)$
$M'_1(z'_1)$ $M'_2(z'_2)$

$f(M_1) = M'_1 \Leftrightarrow z'_1 = i\overline{z_1}$

$f(M_2) = M'_2 \Leftrightarrow z'_2 = i\overline{z_2}$

$M'_1M'_2 = |z'_2 - z'_1|$

$= |i(\overline{z_2} - \overline{z_1})|$

$= |i| . |\overline{z_2 - z_1}|$

$= 1 . |z_2 - z_1|$

$= M_1M_2$

f conserve les distances d'où f est une isométrie.

2) M(z) avec z = x+iy

$f(M) = M \Leftrightarrow z = i\overline{z}$

$\Leftrightarrow x + iy = i(x - iy)$

$\Leftrightarrow (x - y) + i(y - x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$

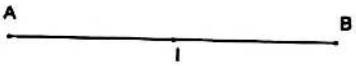
$\Leftrightarrow y = x$

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite $\Delta : y = x$

3) $f = S_\Delta$

EX 14 :

Soit I=A*B



1) $f([AB]) = [AB]$

Deux cas se présentent :

1er cas : $f(A) = A$ et $f(B) = B$

$I = A*B \Rightarrow f(I) = f(A)*f(B)$

$\Rightarrow f(I) = A*B = I$

2em cas : $f(A) = B$ et $f(B) = A$

$I = A*B \Rightarrow f(I) = f(A)*f(B)$

$\Rightarrow f(I) = B*A = I$

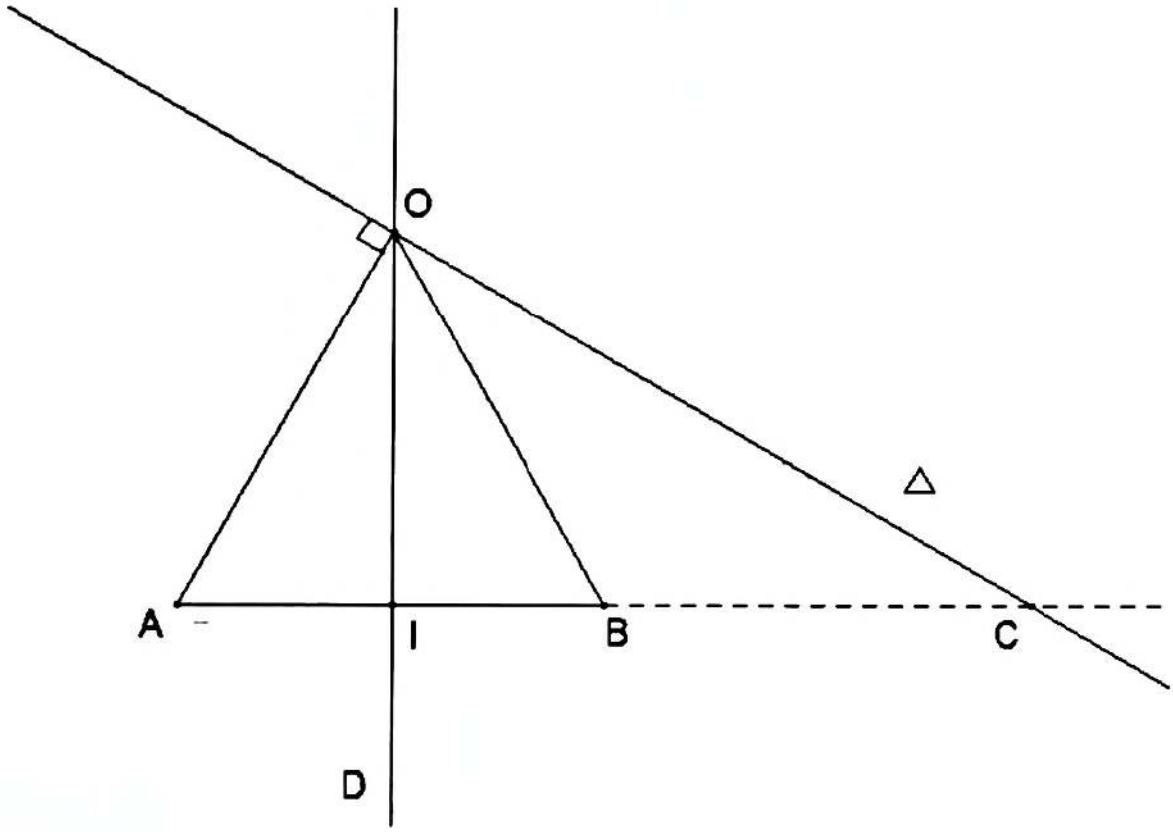
2) d'après 1) f fixe I=A*B d'où f est soit l'identité , Soit une symétrie orthogonale d'axe passent par I, Soit une rotation de centre I.

$\Rightarrow f = id$ ou $f = S_{(AB)}$

ou $f = S_\Delta$ avec Δ=med[AB]

ou $f = r_{(I,\pi)} = S_I$.

EX 13 :



1) $S_2 \circ S_1 = S_{(OB)} \circ S_{(OA)}$

$= r_{(0,2(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}))}$

$= r_{(0,\frac{2\pi}{3})} = R$

D'où $f = S_3 \circ r_{(0,\frac{2\pi}{3})}$

2) Soit C le point d'intersection de Δ et (AB) et I=A*B

$(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})_{[2\pi]}$

$\equiv \frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2\pi) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$

$S_3 \circ S_4 = S_\Delta \circ S_D = r_{(0,2(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}))} = r_{(0,\frac{2\pi}{3})} = R$

3) $f = S_3 \circ R$

$R = S_3 \circ S_4 \Rightarrow S_4 = S_3^{-1} \circ R$

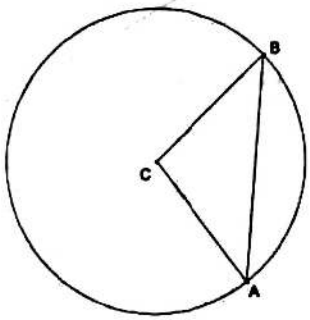
$\Rightarrow S_4 = S_3 \circ R.$

D'où $f = S_4 = S_D$

EX 15 :

1) L'image de (C) pour f est lui-même $\Rightarrow f(O)=O$.

D'où f est $\begin{cases} \nearrow \textit{soit l'identité} \\ \rightarrow \textit{soit une rotation de centre O} \\ \searrow \textit{soit une symétrie orthogonale} \end{cases}$



2) on a $f(O)=O$ D'où $f([AB])=[AB]$.

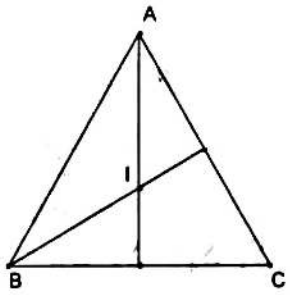
1er cas : $f(A)=A$ et $f(B)=B$

$\Rightarrow f=id$

2em cas : $f(A)=B$ et $f(B)=A$

$\Rightarrow f=S_{\Delta}$ avec $\Delta=\text{mod}[AB]$

EX 16 :



1) $\begin{cases} f(A)=B \\ f(B)=C \end{cases}$

f est une isométrie sans points fixe d'où f est soit : une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul
Soit une symétrie glissante.

$\overline{AB} \neq \overline{BC}$ d'où f n'est pas une translation, par suite f est une symétrie glissante.

2) a) $f(I)=I$ $I \in P$.

$\text{med}[AB] \neq \text{med}[BC]$

D'où f n'est pas une symétrie orthogonale.

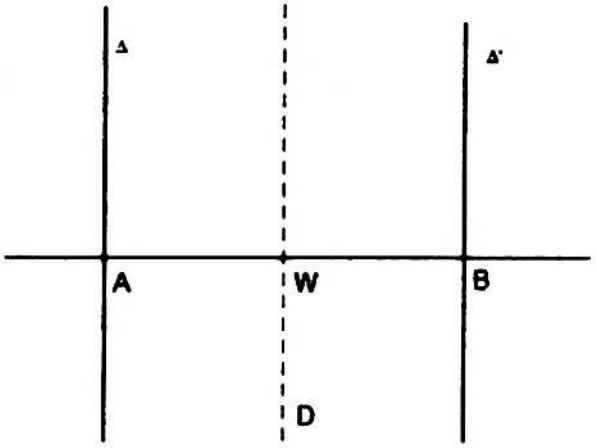
b) f fixe un point I et f n'est pas une symétrie orthogonale d'où f est une rotation de centre I car $f \neq id$

(*) IA=IB et IB=IC

I : le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

$$f = r_{(I,\frac{2\pi}{3})}$$

EX 17 :



Soit W=A*B

1er cas : $(AB) \perp \Delta$ il est clair que $f \neq id$

$*f = t_{\overrightarrow{AB}}$

ou

$*f = r_{(W,\pi)} = S_W$

ou

$*f = S_D$ avec $D // \Delta$ et $W \in D$

2em cas : (AB) et Δ non perpendiculaires.

Soit H : le projeter orthogonale de A sur Δ

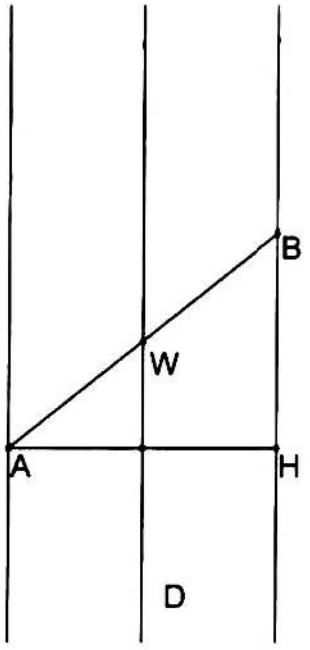
$*f = t_{\overrightarrow{AB}}$

$*f = S_W$

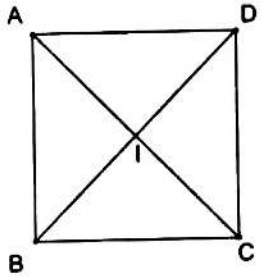
Ou

$*f$: la symétrie glissante

d'axe D et de vecteur $\overrightarrow{HB}$



EX 18 :



1) a) on a : $f(\{A,B,C,D\})=\{A,B,C,D\}$
Le point I est équidistant de A,B,C et D $\Rightarrow f(I)$ est équidistant de A,B,C et D $\Rightarrow f(I)=I$

b) f fixe le point I d'où f est soit l'identité, soit une rotation de centre I d'angle non nul, soit une symétrie orthogonale d'axe passant par I.

2)

- $f(A)=A$ et $f(I)=I$

Comme f n'est pas une symétrie orthogonale alors $f=id_p$

- $f(A)=B$ donc $f\neq id$

Par suite f est une rotation de centre I d'angle $\theta\equiv(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}})(2\pi)$

$$\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

- $f(A)=C$ donc $f\neq id$

$\Rightarrow f$ est une rotation de centre I d'angle $\theta\equiv(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}})(2\pi)$ donc $\theta\equiv\pi[2\pi]$

D'où $f=S_I$

- $f(A)=D$ donc $f\neq id$

$\Rightarrow f$ est une rotation de centre I d'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}})=\frac{-\pi}{2}(2\pi)$

3) f : symétrie orthogonale.

- $f(A)=A$ et $f(I)=I$

$\Rightarrow f=S_{(AI)}$

- $f(A)=B$ d'où $f=S_{\Delta_2}$ avec $\Delta_2=\text{mod}[AB]=\text{mod}[CD]$
- $f(A)=C$

$f=S_\Delta$ avec $\Delta=\text{mod}[AC]$

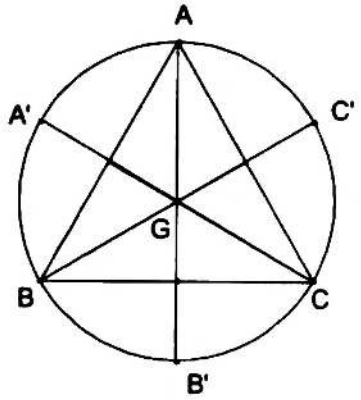
$f=S_{(IB)}$

- $f(A)=D\Rightarrow f=S_{\Delta_1}$ avec $\Delta_1=\text{mod}[AD]=\text{mod}[BC]$

4) l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariant le carré ABCD sont :

$$\left\{id_p;\ r_{(I,\frac{\pi}{2})};\ r_{(I,\frac{-\pi}{2})};\ S_I;\ S_{(IA)};\ S_{(IB)};\ S_{\Delta_1};\ S_{\Delta_2}\right\}$$

EX 19 :



1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

D'où G : le centre de gravité du triangle A'B'C'.

2) $f(\{A,B,C\})=\{A',B',C'\}$

a) f conserve les le centre de gravité

$\Rightarrow f(G)=G$

b) f fixe le point G et $f \neq id$ d'où f est soit une symétrie orthogonale d'axe passant par G soit une rotation de Centre G.

(*) on suppose que f n'est pas une symétrie orthogonale.

- $f(A)=A' \rightarrow f=r_{(G,\frac{\pi}{3})}$
- $f(A)=B' \rightarrow f=r_{(G,\pi)}=S_G$
- $f(A)=C' \rightarrow f=r_{(G,\frac{-\pi}{3})}$

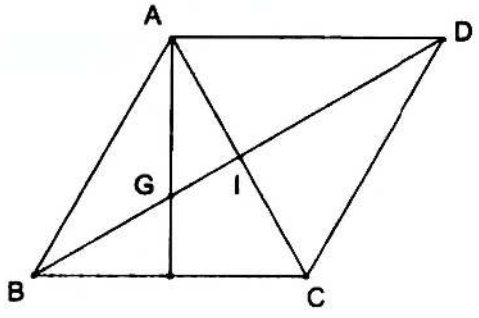
(*) on suppose que f n'est pas une rotation.

- $f(A)=A' \rightarrow f=S_{\Delta_1}$ *avec* $\Delta_1=\text{mod}[AA']$
- $f(A)=B' \rightarrow f=S_{\Delta_2}$ *avec* $\Delta_2=\text{mod}[AB']$
- $f(A)=C' \rightarrow f=S_{\Delta 3}$ *avec* $\Delta_3=\text{mod}[AC']$

Conclusion :

$$f \in \left\{ r_{(G,\frac{\pi}{3})}; r_{(G,\frac{-\pi}{3})}; S_G; S_{\Delta_1}; S_{\Delta_2}; S_{\Delta_3} \right\}$$

EX 20 :



1) Soit G : le centre de gravité du triangle ABC. On a : $f(G)=G$

En faisant un raisonnement analogue a celui de l'exercice N°18

$$f \in \left\{ id_p; r_{(G,\frac{2\pi}{3})}; r_{(G,\frac{-2\pi}{3})}; S_{(AG)}; S_{(BG)}; S_{(CG)} \right\}$$

2) f(ABC)=(ACD)

a) $g = S_{(AC)} \circ f$

l'image du triangle ABC par f est le triangle ACD, d'où l'image du triangle ABC par g est le triangle ABC.

g : laisse le triangle ABC globalement invariant

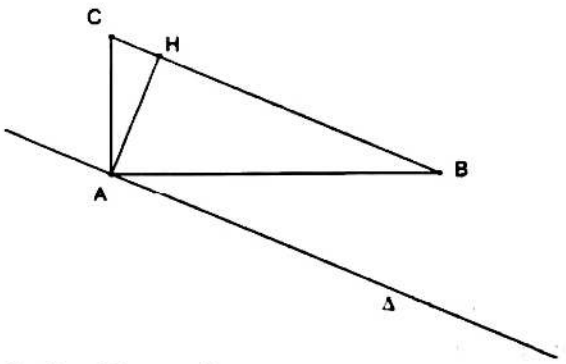
b) d'après 1)

$$g \in \left\{ id_P ; r_{(G,\frac{2\pi}{3})} ; r_{(G,\frac{-2\pi}{3})} ; S_{(AG)} ; S_{(BG)} ; S_{(CG)} \right\}$$

- $g = id \Rightarrow S_{(AC)} \circ f = id$
  $\Rightarrow f = S_{(AC)}$
- $g = S_{(AG)} \Rightarrow S_{(AC)} \circ f = S_{(AG)}$
  $\Rightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(AG)}$
  $\Rightarrow f = r_{(A,\frac{\pi}{3})}$
- $g = S_{(BG)} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(BG)}$
  $\Rightarrow f = S_I$ *avec* $I = A * C$
- $g = S_{(CG)} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(CG)}$
  $\Rightarrow f = r_{(C,\frac{-\pi}{3})}$
- $g = r_{(G,\frac{2\pi}{3})} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ r_{(G,\frac{2\pi}{3})}$
- $g = r_{(G,\frac{-2\pi}{3})} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ r_{(G,\frac{-2\pi}{3})}$

Rq : on montrera dans le chapitre suivant que pour les deux dernier cas : f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

EX 21 :



1) $S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_A$

Car $(AB) \perp (AC)$

$S_\Delta \circ S_{(AH)} = S_A \Rightarrow \Delta$ est la perpendiculaire à (AH) en A. donc $\Delta // (BC)$ *et* $A \in \Delta$

2) $f = S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$

$S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_\Delta \circ S_{(AH)}$

$\Rightarrow S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{(BC)} \circ S_\Delta \circ S_{(AH)}$

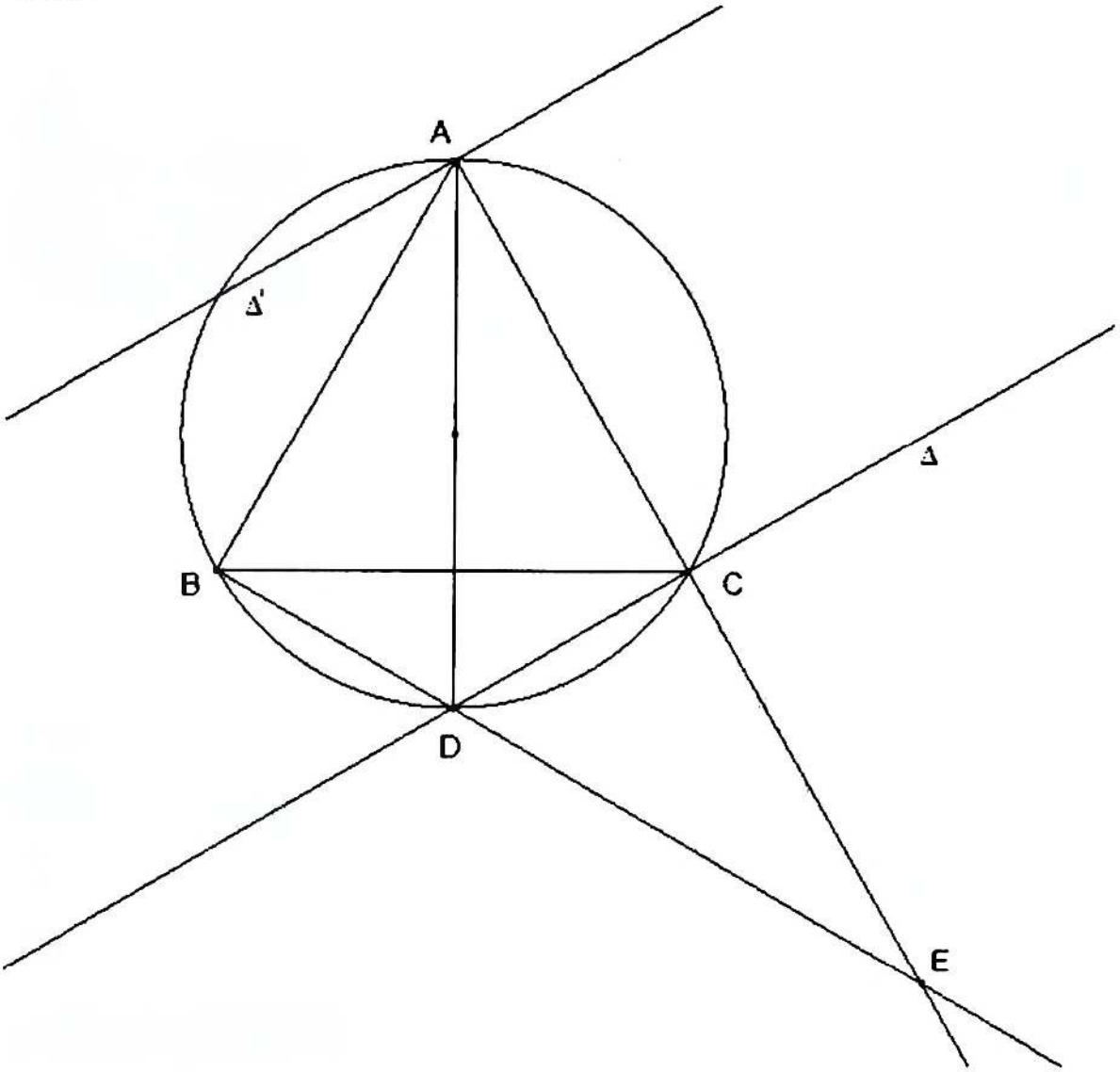
$\Rightarrow f = (S_{(BC)} \circ S_\Delta) \circ S_{(AH)}$

$S_{(BC)} \circ S_\Delta = t_{2\overrightarrow{AH}}$ *car* $\Delta // (BC)$

D'où $f = t_{2\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AH)}$

f est la symétrie glissante d'axe (AH), de vecteur $2\overrightarrow{AH}$

EX 22 :



1)a) [AD] est un diamètre pour (C) => le triangle ABD est rectangle en B
Par suite le triangle ABE est rectangle en B. De plus CA=CB
⇨ c : le centre du cercle circonscrit au triangle ABE
⇨ CB=CE C=A*E

b) C=A*E
le triangle ADC est rectangle en C car [AD] diamètre de (C)
on a donc :

$$\begin{cases} C = A * E \\ (DC) \perp (AE) \end{cases}$$

D'où (DC) est la médiatrice du segment [AE].

2)

$f = S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$

$g = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

a) f est la rotation de centre D d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}}) \equiv \frac{4\pi}{3}(2\pi)$

d'où $f = r_{(D,\frac{-2\pi}{3})}$ de même $g = r_{(A,\frac{2\pi}{3})}$

b) $f = S_{\Delta} \circ S_{(AD)} = r_{(D,\frac{-2\pi}{3})}$ d'où $\Delta = (DC)$ car $D \in (DC)$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}}) \equiv \frac{-\pi}{3}(2\pi)$

$g = S_{(AD)} \circ S_{\Delta'} = r_{(A,\frac{2\pi}{3})}$ Δ' : la perpendiculaire à (AC) en A.

c)

- $\left.\begin{array}{l} \Delta' \perp (AC) \\ \Delta \perp (AC) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta // \Delta'$
- $f \circ g = S_{\Delta} \circ \underbrace{S_{(AD)} \circ S_{(AD)}}_{id} \circ S_{\Delta'}$

$= S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$ car $\Delta // \Delta'$ et $(AC) \perp \Delta$

$= t_{2\overrightarrow{AC}}$